Calculatrice autorisée

Exercice

Pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1^er^ septembre de l'année $2015+n$.

1. a) $u_0 = 3000$ (c'est le nombre d'élèves au 1er septembre 2000). 0,5pt

   b) Pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'élèves au 1er septembre $2000+n$. L'année d'après 10% de l'effectif quitte l'établissement, donc 90 % restent, il en reste $0,9u_n$. Puis 250 nouveaux arrivent. Donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$. 0,5pt

2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $v_n = u_n - 2500$.

   a) Pour tout entier naturel n,

   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2500 \\ &= 0,9u_n + 250 - 2500 \\ &= 0,9u_n - 2250 \\ &= 0,9\left(u_n - \frac{2250}{0,9}\right) \\ &= 0,9\,(u_n - 2500) \\ v_{n+1} &= 0,9v_n \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2500 = 500$. 2pts

   b) Pour tout entier naturel n,

   $v_n = v_0 \times q^n$

   $\boxed{v_n = 500 \times 0,9^n}$

   Or $v_n = u_n + 2500$ donc $\boxed{u_n = 2500 + 500 \times 0,9^n}$. 1 pt

3. Pour tout entier naturel n,

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2500 + 500 \times 0,9^{n+1} - (2500 + 500 \times 0,9^n) \\ &= 2500 + 500 \times 0,9^{n+1} - 2500 - 500 \times 0,9^n \\ &= 500 \times 0,9^{n+1} - 500 \times 0,9^n \\ &= 500 \times 0,9^n(0,9 - 1) \\ &= 500 \times 0,9^n(-0,1) \\ u_{n+1} - u_n &= -50 \times 0,9n \end{aligned}$$

   donc $u_{n+1} - u_n < 0$, ainsi la suite (u_n) est strictement décroissante. 1,5 pt

4. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 2800$.
   D'après la calculatrice $u_4 \approx 2828$ et $u_5 \approx 2795$
   Donc $u_n < 2800$ à partir de $n = 5$.
   A partir de 2020 l'effectif de l'établissement sera inférieur à 2 800. 1,5 pt