Nom : .... Prénom : ....

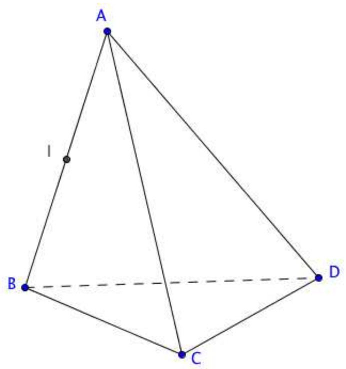
TS 2	Devoir surveillé n°5 : (2 h)	mercredi 23 janvier 2019

Calculatrice autorisée. Barème sur 20,5 points.

Exercice 1 : 4,5 points

ABCD est un tétraèdre et I est le milieu de [AB]. La figure est à compléter ci-dessous.

1. Construire le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
2. a) Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$
   b) En déduire une décomposition de $\overrightarrow{IG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$.
   Qu'en déduit-on sur les points I, G, D et C ?
3. Déterminer et construire l'intersection de la droite (DG) et du plan (ABC).



Exercice 2 : 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(z - \mathrm{i}\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2) = 0$.
2. On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et } z_{\mathrm{K}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   a) Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
   b) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
   c) Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   d) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixes z tels que $|z + \sqrt{2}| = |z - \mathrm{i}\sqrt{2}|$.

Exercice 3 : 6,5 points

f est la fonction définie sur $]-1; 2[\cup]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   b) En déduire l'existence de trois asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.
3. Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

Exercice 4 : 4,5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. a) Calculer u_1 et u_2.
   b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.