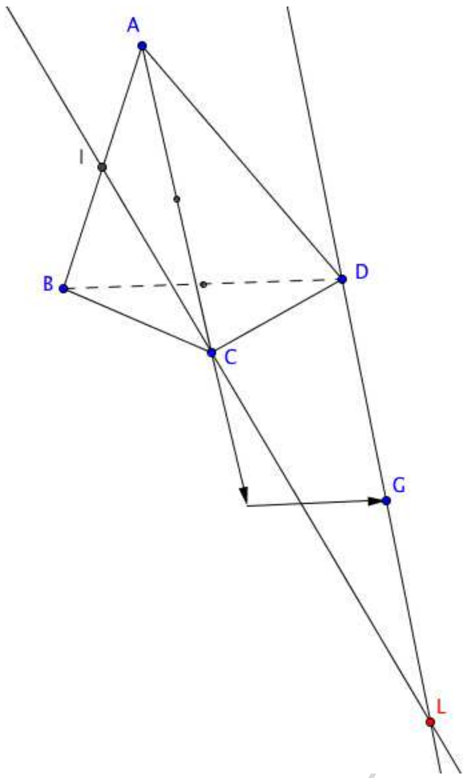
TS 2 — Correction du DS n°5 — du mercredi 23 janvier 2019

Barème sur 21 points.

Exercice 1 4,5 points



1. Construction de G 0,5 pt
2. (a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID}$ or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$
   donc $\boxed{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}}$ 1 pt

   (b) $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}$ or $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
   soit $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{IC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$ donc $\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$
   donc $\boxed{\overrightarrow{IG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}}$
   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont coplanaires. Ils ont la même origine I donc les points I, G, D et C sont coplanaires. 2 pts
3. Les droites (DG) et (IC) sont donc coplanaires et non parallèles donc elles sont sécantes en un point L. Or (IC) est une droite du plan (ABC), donc L est un point du plan (ABC). D n'est pas un point de (ABC). Donc L est le point d'intersection de la droite (DG) et du plan (ABC). 1 pt

---

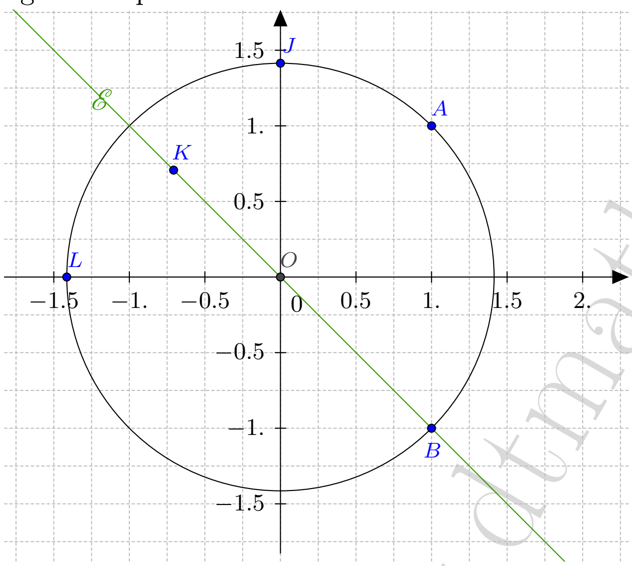
Exercice 2 : 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(z-\mathrm{i}\sqrt{2})(z^2-2z+2)=0$.
   (E) $\iff$ $z-\mathrm{i}\sqrt{2}=0$ ou $z^2-2z+2=0$
   $\Delta=(-2)^2-4\times1\times2=4-8=-4=(2\mathrm{i})^2$
   (E) $\iff$ $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=\dfrac{2-2\mathrm{i}}{2}$ ou $z=\dfrac{2+2\mathrm{i}}{2}$
   (E) $\iff$ $z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=1-\mathrm{i}$ ou $z=1+\mathrm{i}$
   $\boxed{\mathscr{S}=\{\mathrm{i}\sqrt{2};1-\mathrm{i}:1+\mathrm{i}\}}$ 1,5 pt
2. On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}}=1+\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{B}}=1-\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{J}}=\mathrm{i}\sqrt{2}\quad\text{et}\quad z_{\mathrm{K}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(a) figure complète.



1 pt

(b) L est le symétrique du point J par rapport au point K donc K est le milieu de [LJ] donc $z_K = \dfrac{z_L + z_J}{2}$ donc $z_L = 2z_K - z_J = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$.

$\boxed{z_L = -\sqrt{2}}$ 0,5 pt

(c) $OA = |z_A| = |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$OB = |z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A| = \sqrt{2}$

$OJ = |z_J| = |\mathrm{i}\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

$OL = |z_L| = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

Les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. 1 pt

(d) $M(z) \in \mathscr{E} \iff |z + \sqrt{2}| = |z - \mathrm{i}\sqrt{2}|$

$M(z) \in \mathscr{E} \iff |z - (-\sqrt{2})| = |z - \mathrm{i}\sqrt{2}|$

$M(z) \in \mathscr{E} \iff |z - z_L| = |z - z_J|$

$M(z) \in \mathscr{E} \iff ML = MJ$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment [LJ]. 1 pt

---

Exercice 3 : 7 points

f est la fonction définie sur $]-1; 2[\cup]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}.$$

1. (a) • Étude au voisinage de 1.

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (x+1) = 0$ avec $x + 1 > 0$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$

Par limite d'une somme $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = +\infty}$

• Étude au voisinage de 2 à gauche .

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-2) = 0$ avec $x - 2 < 0$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

Par limite d'une somme $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -\infty}$

- Étude au voisinage de 2 à droite .

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x-2)=0$ avec $x-2>0$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$

Par limite d'une somme $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=+\infty}$

- Étude au voisinage de $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$

Par limite d'une somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1}$ 2 pts

(b) La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales d'équations $x=-1$ et $x=2$ et elle admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$. 0,75 pt

2. Pour tout réel $x>-1$ et $x\neq 2$,
$f(x)-1=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x-2+x+1}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$.

x	-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)(x-2)$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-1$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de son asymptote horizontale lorsque $f(x)-1>0$, c'est-à-dire sur $\left]-1;\dfrac{1}{2}\right[$ et sur$]2;+\infty[$.
$\mathscr{C}$ est strictement en-dessous de son asymptote horizontale lorsque $f(x)-1<0$, c'est-à-dire sur $\left]\dfrac{1}{2};2\right[$.

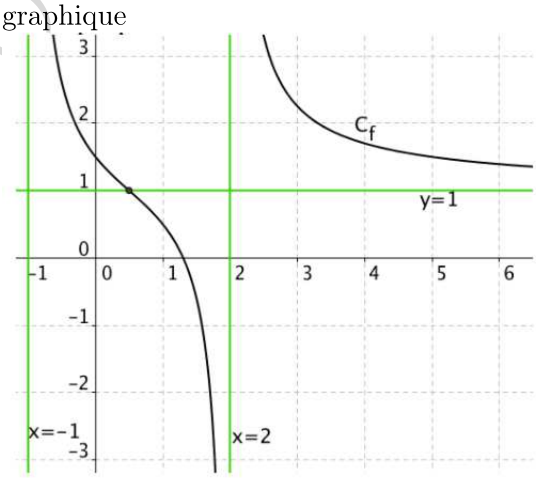
$\mathscr{C}$ coupe son asymptote horizontale lorsque $x=\dfrac{1}{2}$. 1,75 pt

3. f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition, c'est-à-dire sur $]-1;2[$ et sur $]2;+\infty[$.
Pour tout $x>-1$ et $x\neq 2$, $f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}+\dfrac{-1}{(x-2)^2}$.
$f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]-1;2[$ et sur $]2;+\infty[$.

x	-1		2		$+\infty$
var de f	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

1,5 pt

4. graphique



1 pt

Exercice 4 : 4,5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) $u_1 = \dfrac{3\times u_0}{1+2u_0} = \dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$

   et $u_2 = \dfrac{3\times u_1}{1+2u_1} = \dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{10}$. 0,5 pt

   (b)
   - Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :« $u_n > 0$ ».
   - *Initialisation* : Si $n = 0$

     Alors $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n, on a $u_n > 0$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi (c-à -d. $u_{n+1} > 0$).

     Par hypothèse de récurrence $u_n > 0$ donc $3u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$. Ainsi, u_{n+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $u_{n+1} > 0$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire, par le principe de récurrence on a bien pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. 1pt

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie le de signe $u_{n+1} - u_n$.

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \dfrac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \dfrac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n}$

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$

   Or $0 < u_n < 1$ donc $2u_n > 0$; $1 - u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$ donc $\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$ 1,5pt

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge. Notons ℓ sa limite réelle.

   Par opération, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \dfrac{3\ell}{1+2\ell}$. Par unicité de la limite ℓ vérifie l'équation : $\ell = \dfrac{3\ell}{1+2\ell}$.

   $\ell = \dfrac{3\ell}{1+2\ell} \iff \ell + 2\ell^2 = 3\ell \iff 2\ell^2 - 2\ell = 0 \iff \ell(\ell-1) = 0 \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1$

   (u_n) est croissante et a pour premier terme $\dfrac{1}{2}$ elle ne peut converger vers 0. Donc $\boxed{\ell = 1}$. 1,5pt