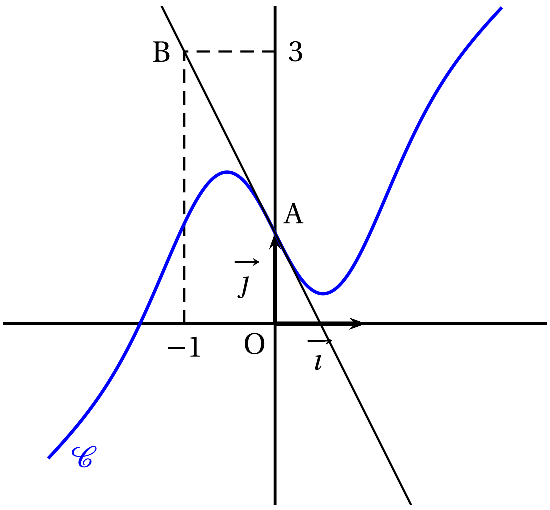
Le barème est donné à titre indicatif.
Les réponses doivent être justifiées sauf mention ***explicite*** *du contraire.*
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 (5 points)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathscr{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0 ; 1)$ et $(-1 ; 3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}.$$

1. a) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A.
   b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
   c) Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

   d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
   Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

   a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1 ; 0]$, $f(x) > 0$.
   b) Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

Exercice 2 (6 points)

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

2. Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

   0,92 0,93 0,94 0,95.

Partie B : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.

L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime que, quelle que soit l'opinion de la personne interrogée, le taux de réponses non sincères est de 15 % .

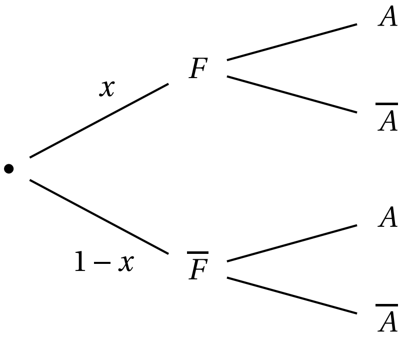
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'événement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'événement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'événement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'événement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0{,}29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_{\overline{F}}(A)$ et $P_F(A)$.

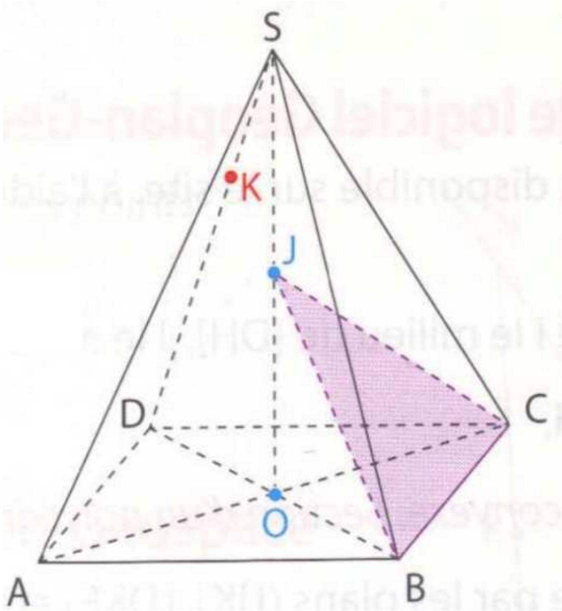
2. On pose $x = P(F)$.
   a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
   b) En déduire une égalité vérifiée par x.



3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Exercice 3 (5 points)

SABCD est une pyramide à base carrée ABCD. Le point O est le centre de ABCD. J est le milieu de [SO]. Le point K est tel que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.



1. Justifier que les points S, B, D, O, J et K sont coplanaires.

2. Démontrer que $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

3. Exprimer $\overrightarrow{SO}$ en fonction de $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SD}$. En déduire que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$.

4. Montrer que les points B, K et J sont alignés.

Exercice 4 (4 points)

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{cases}$$

   Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par

$$t_n = u_n - 5.$$

   Affirmation A : La suite (t_n) est une suite géométrique.

   Affirmation B : Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n + 5.$$

2. Soit une suite (v_n).

   Affirmation C : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1,

$$1 - \frac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

   alors la suite (v_n) converge.

3. Soit (w_n) une suite convergente.

   Affirmation D : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive.