Exercice 1 (5 points)

Métropole septembre 2014 Ex 1 Extraits

On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x, $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$.

1. (a) Le point A a pour abscisse 0 ; or $f(0) = 0 + 1 + a \times 0e^{-0^2} = 1$
   Donc $\mathscr{C}$ passe par le point A $(0 ; 1)$. 0,5 pt

   (b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{-1-0} = -2$. 0,5 pt

   (Remarque : Inutile de déterminer une équation de la tangente pour obtenir le coefficient directeur de celle-ci.)

   (c) D'après l'énoncé, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule $\left(e^u\right)' = u'e^u$ et la dérivée d'une somme et d'un produit :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 0 + ae^{-x^2} + ax(-2x)e^{-x^2} \\ &= 1 + ae^{-x^2}\left(1-2x^2\right) \\ &= 1 - a\left(2x^2-1\right)e^{-x^2} \end{aligned}$$

   1 pt

   (d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A ; cela veut dire que le coefficient directeur de (AB) est égal au nombre dérivé de la fonction f en x_A soit $f'(0)$.
   On a donc $f'(0) = -2 \iff 1 - a(0-1)e^0 = -2 \iff 1 + a = -2 \iff a = -3$ 1 pt

2. D'après la question précédente, pour tout réel x, $f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$ et $f'(x) = 1 + 3\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$.

   (a) $$\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x^2} > 0 \\ \forall x \in]-1\,;\,0],\ -3x \geqslant 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\forall x \in]-1\,;\,0],\ -3xe^{-x^2} \geqslant 0} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \forall x \in]-1\,;\,0],\ x+1 > 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\forall x \in]-1\,;\,0],\ x+1-3xe^{-x^2} > 0}$$

   Donc, pour tout x de $]-1\,;\,0]$, $f(x) > 0$. 1 pt

   (b) Si $x \leqslant -1$, alors $x^2 \geqslant 1$ donc $2x^2 \geqslant 2$, donc $2x^2 - 1 \geqslant 1$ et donc $3\left(2x^2-1\right) \geqslant 3$.
   Comme pour tout x, $e^{-x^2} > 0$, on peut dire que pour tout $x \leqslant -1$, (par produit) :
   $$3\left(2x^2-1\right)e^{-x^2} > 0\,.$$
   Et ainsi : pour tout $x \leqslant -1$, $f'(x) = 1 + 3\left(2x^2-1\right)e^{-x^2} > 0$. 1 pt

Exercice 2 (6 points)

Centres étrangers 2016

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

   (a) Interroger une personne et lui demander si elle accepte de répondre peut être modélisé par une épreuve de Bernoulli dont l'évènement succès est « La personne accepte de répondre »de probabilité $p = 0.6$.

   On répète l'expérience aléatoirement $n = 700$ fois dans une population suffisamment grande pour considérer que les tirages sont avec remise donc indépendants.

   De plus, la variable aléatoire X correspond au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre, elle compte donc le nombre de succès.

   On peut donc conclure que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0{,}6$. 1 pt

   (b) On a : $P(X \geqslant 400) = 1 - P(X < 400) = 1 - P(X \leqslant 399)$.

   La calculatrice donne $P(X \leqslant 399) \simeq 0{,}0573$ et $P(X \geqslant 400) \simeq 0{,}9427$.

   La meilleure valeur approchée parmi les solutions proposées est 0,94. 1 pt

Partie B : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

- F est l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ est l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A est l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ est l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Et d'après les données, on a $p(A) = 0{,}29$.

1. Par expérience, l'institut estime que, quelle que soit l'opinion de la personne interrogée, le taux de réponses non sincères est de 15 % .

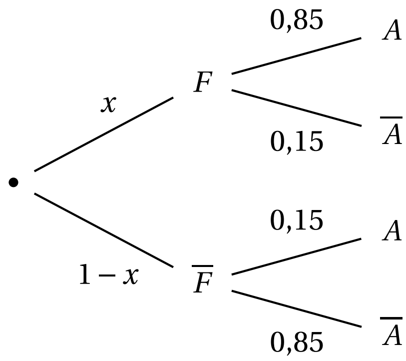
   On en déduit la probabilité que la personne interrogée affirme qu'elle est favorable sachant qu'en réalité elle est défavorable, soit : $P_{\overline{F}}(A) = 0{,}15$.

   De même, la probabilité que la personne interrogée affirme qu'elle est défavorable sachant qu'en réalité elle est favorable est : $P_F\left(\overline{A}\right) = 0{,}15$.

   Et comme $P_F(A) + P_F\left(\overline{A}\right) = 1$, on a : $p_F(A) = 0{,}85$. 0,5 pt

2. On pose $x = P(F)$.

   (a) On a l'arbre de probabilité ci-dessous.



1 pt

(b) Les évènements F et $\overline{F}$, formant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales on a :
$P(A) = P(A \cap F) + P\left(A \cap \overline{F}\right)$.

Or $P(A) = 0{,}29$, $P(A \cap F) = 0{,}85x$ et $P\left(A \cap \overline{F}\right) = 0{,}15(1-x)$.

On en déduit que x est solution de $0{,}29 = 0{,}85x + 0{,}15(1-x)$. 1,5 pt

3. Déterminons, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

   Il suffit de résoudre l'équation $0{,}29 = 0{,}85x + 0{,}15(1-x)$.

   Soit : $0{,}29 - 0{,}15 = x(0{,}85 - 0{,}15)$

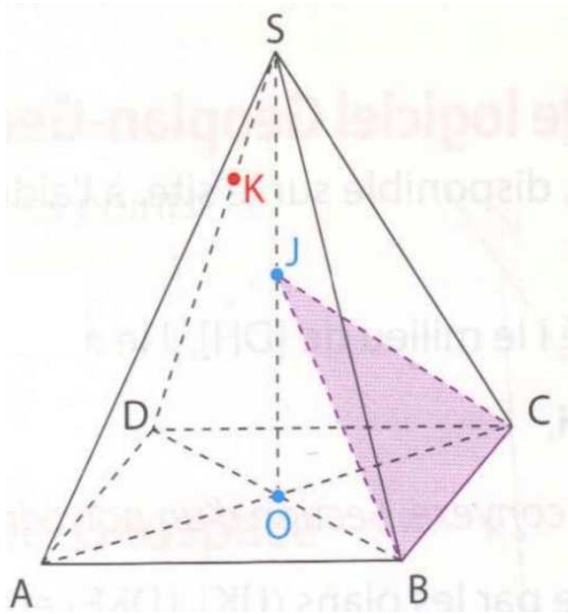
   On trouve $x = \dfrac{0{,}14}{0{,}70} = \dfrac{14}{70} = 0{,}2$.

   20 % des personnes ayant répondu au sondage sont favorables au projet. 1 pt

Exercice 3 (5 points)

SABCD est une pyramide à base carrée ABCD.
Le point O est le centre de ABCD.
J est le milieu de [SO].
Le point K est tel que $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

1. Justifions que les points S, B, D, O, J et K sont coplanaires.
   O est le centre de ABCD donc O est le milieu de [BD] donc O appartient au plan (SBD).
   J est le milieu de [SO] et (SO) incluse dans (SBD) donc J appartient au plan (SBD).
   $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ donc $K \in (SD)$ et donc $K \in (SBD)$.
   S, B, D, O, J et K sont donc coplanaires. 1 pt



2. Démontrons que $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.
   $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SK}$ or $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$
   donc $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ 1 pt

3. Exprimons $\overrightarrow{SO}$ en fonction de $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SD}$.
   O est le milieu de $[BD]$ donc d'après la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{SO} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD})$.

   Exprimons $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SD}$.
   $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SJ}$ et J est le milieu de $[SO]$
   donc $\overrightarrow{SJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SO}$, or $\overrightarrow{SO} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD})$
   donc $\overrightarrow{SJ} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD})$ et $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BS} + \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD})$
   et donc $\overrightarrow{BJ} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SD}$ 2 pt

4. Montrer que les points B, K et J sont alignés.
   On a $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et $\overrightarrow{BJ} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SD}$
   donc $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BK}$. donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires. Donc les points B, K et J sont alignés.
   1 pt

Exercice 4 (4 points)

Nouvelle Calédonie février 2018 (Extraits)

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{array}\right.$

   Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = u_n - 5$. Donc $u_n = t_n + 5$.

   Affirmation A : La suite (t_n) est une suite géométrique.

   $t_{n+1} = u_{n+1} - 5 = (2u_n - 5) - 5 = 2u_n - 10 = 2(t_n + 5) - 10 = 2t_n + 10 - 10 = 2t_n$

   Donc la suite (t_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $t_0 = u_0 - 5 = 14 - 5 = 9$.

   Affirmation A vraie 1 pt

   Affirmation B : Pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

   La suite (t_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $t_0 = 9$ donc, pour tout entier naturel n, $t_n = t_0 \times q^n = 9 \times 2^n$.

   Pour tout n, $u_n = t_n + 5$ donc pour tout n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

   Affirmation B vraie

   1 pt

2. Soit une suite (v_n).

   Affirmation C : Si, pour tout entier naturel n supérieur à 1, $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ alors la suite (v_n) converge.

   D'après le cours : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par produit et somme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

   On en déduit, d'après le théorème des gendarmes que la suite (v_n) converge aussi vers 1.

   Affirmation C vraie

   1 pt

3. Soit (w_n) une suite convergente.

   Affirmation D : Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (w_n) sont strictement positifs, alors la limite de la suite (w_n) est aussi strictement positive. Cherchons un contre-exemple.

   Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $w_n = \dfrac{1}{n}$. Tous les termes de la suite sont strictement positifs et la suite (w_n) converge vers 0.

   Affirmation D fausse 1 pt