TS 2	Devoir surveillé n°3 : (2 h)	mercredi 28 novembre 2018

Calculatrice autorisée. Barème sur 21 points.

Question de cours : 1,5 point

Démontrer la propriété suivante.

« Si les événements A et B sont indépendants alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également. »

Exercice 1 4,5 points

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

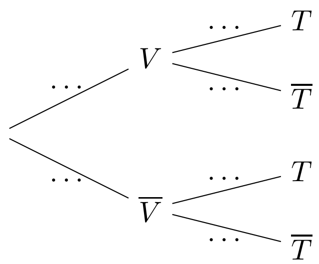
- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$.
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$.

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On considère les événements :

- V : « la personne est contaminée par le virus » ;
- T : « le test est positif ».

1. (a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



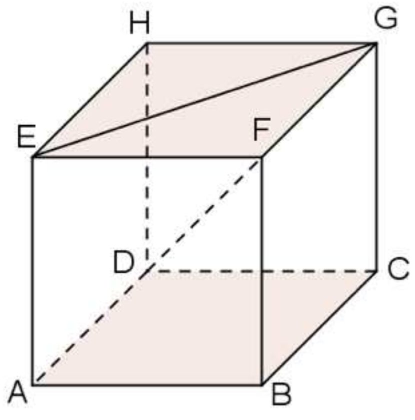
   (b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
3. (a) Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Exercice 2 : 3,5 points

ABCDEFGH est un cube.

1. Démontrer que les droites (DH) et (EG) sont orthogonales.
2. En déduire que les droites (DF) et (EG) sont orthogonales.
3. Démontrer que la droite (BE) et le plan (AFD) sont orthogonaux.
4. En déduire que la droite (DF) et le plan (BEG) sont orthogonaux.



Exercice 3 4,5 points

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^x$ et $g(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g.
2. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ n'ont que le point O en commun.
3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en O.

Exercice 4 5 points

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = 1 \\ v_{n+1} & = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	**Algorithme N° 2**	**Algorithme N° 3**
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelle conjecture peut-on émettre concernant la limite de la suite (v_n) ?

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par : $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.
   (a) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
   (b) En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 5 2 points

Dans chacun des cas, étudier la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n + 7}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = \dfrac{2n}{n + \sqrt{n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$