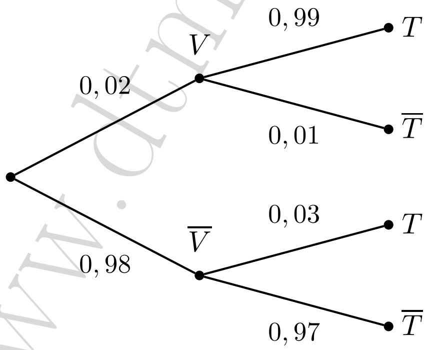
Barème sur 21 points.

Question de cours : 1,5 point

Voir le cours 1,5 pt

Exercice 1 4,5 points

1. (a) D'après l'énoncé, on a : $P(V) = 0,02$; $P_V(T) = 0,99$; $P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0,97$.
Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



0,75 pt

(b) $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0,99 \times 0,02 = 0,0198$ 0,5 pt

2. D'après la formule des probabilités totales, avec V et $\overline{V}$ qui forment une partition de l'univers, on a :
$P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T)$
$P(T) = 0,0198 + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(T)$
$P(T) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0198 + 0,0294 = 0,0492$.
$\boxed{\text{La probabilité que le test soit positif est de 0,0492.}}$ 1,25 pt

3. (a) $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4024$.
Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif. 1 pt

(b) La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est $P_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,97 \times 0,98}{1 - 0,0492} \approx 0,9998$. 1 pt

---

Exercice 2 : 3,5 points

1. ABCDEFG étant un cube, la droite (DH) est orthogonale aux 2 droites (EH) et (HG) sécantes en H, elle est donc orthogonale au plan (EGH) contenant ces 2 droites sécantes. La droite (DH) est donc orthogonale à toute droite du plan (EGH) : elle est donc orthogonale à (EG). 0,75 pt
2. Les droites (EG) et (HF) sont orthogonales comme diagonales du carré EFGH, de plus on a vu que (EG) était orthogonale à (DH). La droite (EG) étant orthogonale aux 2 droites (HF) et (DH), sécantes en H, elle est donc orthogonale au plan(DFH).Donc (EG) est orthogonale à (DF) qui est une droite du plan (DFH). 1 pt
3. Les droites (BE) et (AF) sont orthogonales comme diagonales du carré ABFE. Par ailleurs, la droite (AD) est orthogonale aux droites (AE) et (AB), sécantes en A, car ABCDEFGH est un cube ;(AD) est donc orthogonale au plan (AEB) et donc à la droite (BE), droite contenue dans ce plan. La droite (BE), orthogonale aux droites (AD) et (AF) sécantes en A, est orthogonale au plan (AFD). 1 pt

4. D'après la question précédente, (BE) est orthogonale au plan(AFD) donc elle est orthogonale à (DF) contenue dans ce plan. Par ailleurs (DF) est orthogonale à (EG) (question2). La droite(DF) étant orthogonale aux 2 droites (BE) et (EG), sécantes en E, elle est orthogonale au plan (BEG) contenant ces 2 droites. 0,75 pt

---

Exercice 3 4,5 points

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^x$ et $g(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

1. **Etude de la fonction f.**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x,
   $f'(x) = 1\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$. 1,25 pt

   Etude de la fonction g.
   La fonction f est définie dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$.(la fonction *exp* ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$)
   Pour tout réel x,
   $g'(x) = \dfrac{1\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

   La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.1,25 pt

2. Pour tout réel x,
   $f(x) = g(x) \iff x\mathrm{e}^x = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$
   $f(x) = g(x) \iff x(\mathrm{e}^x)^2 = x$
   $f(x) = g(x) \iff x\mathrm{e}^{2x} - x = 0$
   $f(x) = g(x) \iff x(\mathrm{e}^{2x} - 1) = 0$
   $f(x) = g(x) \iff x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{2x} = 1$
   $f(x) = g(x) \iff x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^0$
   $f(x) = g(x) \iff x = 0 \text{ ou } 2x = 0$
   $f(x) = g(x) \iff x = 0$
   $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point commun d'abscisse 0. Or $f(0) = g(0) = 0$. Le seul point commun est donc O. 1,25 pt

3. $f'(0) = (1+0)\mathrm{e}^0 = 1$ et $g'(0) = \dfrac{1-0}{\mathrm{e}^0} = 1$.
   Les tangentes en O ont le même coefficient directeur donc elles sont confondues.
   Lest courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en O. 0,75 pt

---

Exercice 4 5 points

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

1. L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.
   L'algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.
   L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de v_0 à v_n et les affiche tous.
   $\boxed{\text{C'est donc l'algorithme n° 3 qui convient.}}$ 1 pt
2. D'après les tables de valeurs de la suite , il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3. 0,5 pt
3. (a) $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{v_{n+1} - 3} - \dfrac{1}{v_n - 3} = \dfrac{1}{\frac{9}{6-v_n} - 3} - \dfrac{1}{v_n - 3} = \dfrac{6 - v_n}{3v_n - 9} - \dfrac{1}{v_n - 3} = \dfrac{6 - v_n - 3}{3v_n - 9} = \dfrac{-v_n + 3}{3v_n - 9} = -\dfrac{v_n - 3}{3(v_n - 3)} = -\dfrac{1}{3}$.

   Ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$. 1,5 pt

   (b) $w_n = w_0 + nr = \dfrac{1}{1-3} - \dfrac{1}{3}n = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n$.

   Comme $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$, on a $v_n = \dfrac{1}{w_n} + 3 = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n} + 3 = \dfrac{6}{-3 - 2n} + 3$. 1 pt

   (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (-3 - 2n) = -\infty$ donc par limite d'un quotient , $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6}{-3 - 2n} = 0$, donc par limite d'une somme $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3}$. 1 pt

---

Exercice 5 2 points

Dans chacun des cas, étudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n.

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n + 7}$. C'est une F.I.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_n = \dfrac{n\left(2n - \dfrac{1}{n}\right)}{n\left(3 + \dfrac{7}{n}\right)} = \dfrac{2n - \dfrac{1}{n}}{3 + \dfrac{7}{n}}$$
   $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ par limite d'une somme , $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2n - \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \dfrac{7}{n}\right) = 0$.
   Par limite d'un quotient, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$. 1 pt
2. $u_n = \dfrac{2n}{n + \sqrt{n}}$. C'est une F.I.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^n$,
   $$u_n = \dfrac{2n}{n + \sqrt{n}} = \dfrac{2n}{n\left(1 + \dfrac{\sqrt{n}}{n}\right)} = \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$
   $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$, par limite d'un quotient , $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$. 1 pt