*Le barème est donné à titre indicatif.*
*Les réponses doivent être justifiées sauf mention **explicite** du contraire.*
La calculatrice est autorisée.

Prévoir :

- une première copie pour l'exercice 1
- une seconde copie pour les exercices 2 et 3
- une troisième copie pour l'exercice 4

**Exercice 1** ( 6,5 points )

L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale).
On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie.
L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas ;
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- $B$ l'événement : « l'angine du malade est bactérienne » ;
- $T$ l'événement : « le test effectué sur le malade est positif ».

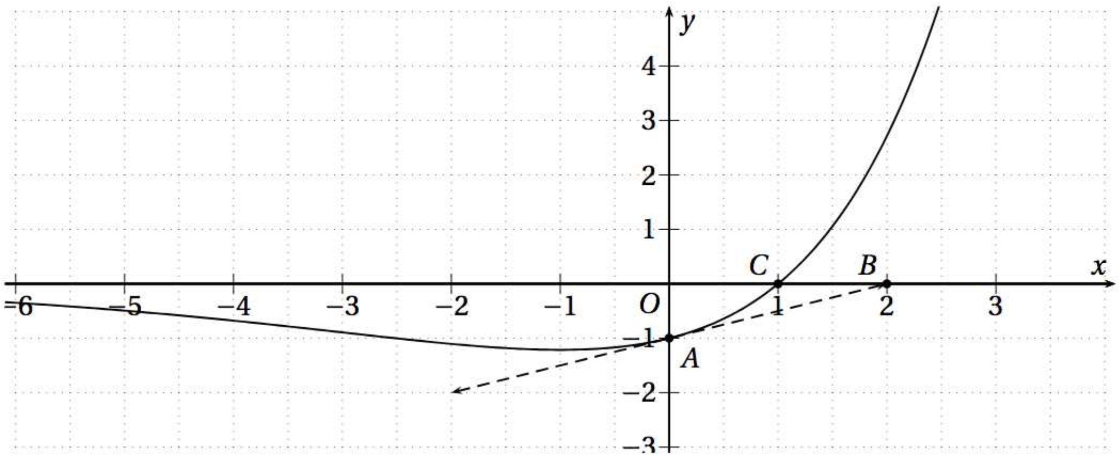
1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. a) Quelle est la probabilité que l'angine du malade soit bactérienne et que le test soit positif ?
   b) Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.
   c) Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne ?
3. On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine. On assimile le choix des cinq malades à des tirages successifs avec remise.

   On note $X$ la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.

   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par $X$ ?
   b) Calculer la probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif. (Arrondir le résultat à $10^{-3}$ près.)
   c) Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**Exercice 2** ( 3 points )

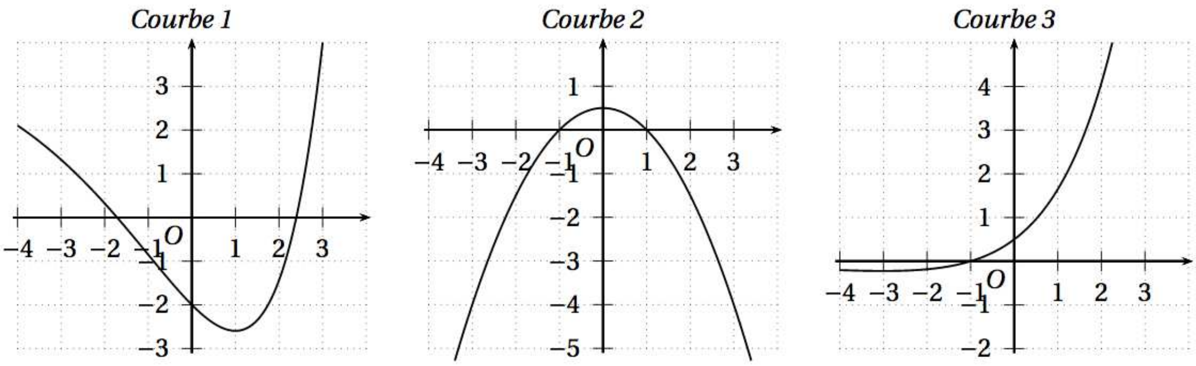
Dans le repère ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$. La courbe passe par les points $A(0;-1)$ et $C(1;0)$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse $-1$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente à la courbe en $A$ passe par le point $B(2;0)$.




1. Donner sans justifier $f(0)$ et $f(1)$.

2. En justifiant déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.

3. Une des courbes ci-dessous représente la fonction dérivée $f'$ de $f$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix.




**Exercice 3** ( 5 points )

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

1. Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$. Montrer que pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

2. Étudier les variations de $f$ et dresser le tableau des variations de $f$ en y indiquant les valeurs exactes des extremums locaux.

3. Déterminer les abscisses des points de la courbe de $f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 3.

**Exercice 4** ( 5,5 points )

On définit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par, pour tout entier naturel $n$

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 10 \\ u_{n+1} & = & u_n + 0{,}4 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 8 \\ v_{n+1} & = & 1{,}028 v_n \end{array}\right.$$

1. a) Parmi ces deux suites, préciser laquelle est arithmétique et laquelle est géométrique ; donner leurs raisons respectives.

   b) Exprimer $u_n$ et $v_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.

2. On donne l'algorithme suivant dans lequel $n$ est un entier naturel, et $U$ et $V$ sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang $n$ des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ :

```
n ← 0
U ← 10
V ← 8
Tant que U ⩾ V
      U ← U + 0,4
      V ← V × 1,028
      n ← n + 1
Fin Tant que
```

   En sortie de cet algorithme, $n$ a pour valeur 46.

   Interpréter ce résultat.

3. En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie « *An essay on the principle of population* » dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine.

   Il écrit :

   > « *Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique. [...] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique.* »

   En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 0,4 million de personnes de plus chaque année.

   On utilisera ce modèle pour répondre aux questions suivantes.

   a) Quelle aurait été, en million d'habitants, la population de l'Angleterre en 1810 ?

   On arrondira le résultat au millième.

   b) À partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait-elle dépassé 16 millions d'habitants ? (On pourra s'aider de la calculatrice.)

   c) À partir de quelle année la population de l'Angleterre serait-elle devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture ?