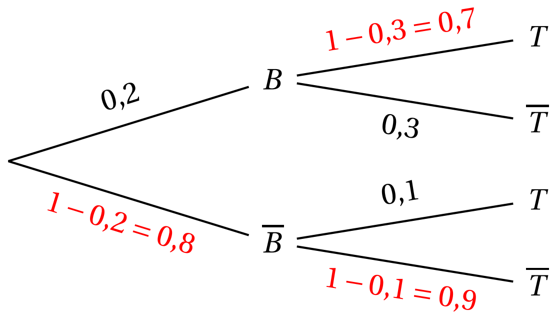
Exercice 1 (6,5 points)

1. On représente la situation par un arbre de probabilité :



1 pt

2. (a) L'angine du malade est bactérienne et que le test est positif correspond à $B \cap T$:
$p(B \cap T) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$ 0,75 pt
   (b) D'après la formule des probabilités totales avec B et $\overline{B}$ qui forment une partition de l'univers :
$p(T) = p(B \cap T) + p(\overline{B} \cap T) = 0{,}14 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}22$ 1,5 pt
   (c) Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. La probabilité pour que son angine soit bactérienne est : $p_T(B) = \dfrac{p(B \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}14}{0{,}22} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64$. 0,75 pt

3. On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.

   (a) Pour un malade, il n'y a que deux possibilités : il a un test positif avec une probabilité de $p = 0{,}22$, ou il a un test négatif avec une probabilité de $1 - p = 0{,}78$.
On est dans le cas d'une répétition de 5 expériences identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui donne le nombre de malades dont le test est positif suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}22$. 1 pt
   (b) La probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif est :
$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \times 0{,}22^0 \times 0{,}78^5 \approx 0{,}711$. 1 pt
   (c) L'espérance mathématique de X est $E(X) = np = 5 \times 0{,}22 = 1{,}1$. 0,5 pt

Exercice 2 (3 points)

1. Graphiquement, on lit que $f(0) = -1$ et $f(1) = 0$. 0,5 pt

2. $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1. Cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses (d'après l'énoncé) donc $f'(-1) = 0$.

   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 . Cette tangente est la droite (AB) donc $f'(0) = \dfrac{0-(-1)}{2-0} = \dfrac{1}{2}$ soit $f'(0) = \dfrac{1}{2}$. 2×0,75 pt

3.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
var de f		↘		↗	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   C'est donc la courbe 3 qui représente f'. 1 pt

Exercice 3 (5 points)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$.

1. f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, soit sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
   Pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x-1)-1(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. 1 pt

2. Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est du signe de x^2-2x . Cherchons les valeurs qui annulent x^2-2x.
   $f'(x) = 0 \iff x^2-2x = 0$
   $\iff x(x-2) = 0$
   $\iff x = 0$ ou $x-2 = 0$
   $\iff x = 0$ ou $x = 2$
   On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
var de f		↗	-1	↘	$\Vert$	↘	3	↗	

   2 pts

3. Les abscisses des points de la courbe de f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses correspondent aux solutions de l'équation $f'(x) = 0$.
   D'après le 2. $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$
   La tangente à la courbe de f est parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0 et 2. 1 pt

4. L'équation réduite de la tangente à la courbe de au point d'abscisse 3 est :
   $y = f'(3)(x-3) + f(3)$.
   On a $f(3) = \dfrac{3^2-3+1}{3-1} = \dfrac{7}{2}$ et $f'(3) = \dfrac{3^2-2\times 3}{(3-1)^2} = \dfrac{3}{4}$.
   L'équation réduite est donc : $y = \dfrac{3}{4}(x-3) + \dfrac{7}{2}$ soit $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$ 1 pt

Exercice 4 (5,5 points)

1. (a) La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0{,}4$. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}028$. 1 pt

   (b) Pour tout entier naturel, n, $u_n = u_0 + nr = 10 + 0{,}4n$ et $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 1{,}028^n$. 1 pt

2. Pour tout entier naturel tel que $n < 46$, $u_n \geqslant v_n$. À partir du rang 46, et pour tout entier naturel $n \geqslant 46$, $u_n < v_n$. 0,5 pt

3. (a) D'après le modèle décrit, le terme v_n donne le nombre de millions d'habitants pour l'année $1800 + n$. Donc $v_{10} = 8 \times 1{,}028^{10} \approx 10{,}544$.

   Selon ce modèle, la population de l'Angleterre en 1810 était de 10,544 millions d'habitants environ. 1 pt

   (b) Cherchons à partir de quel rang n, on a : $v_n \geqslant 16$. D'après la calculatrice , $v_{25} \approx 15{,}96$ et $v_{26} \approx 16{,}40$ donc $v_n \geqslant 16$ à partir de $n = 26$. C'est donc à partir de 1826 que la population aurait dépassé 16 millions d'habitants. 1 pt

   (c) La suite (v_n) décrit le nombre d'habitants en Angleterre durant l'année $1800 + n$ et la suite (u_n) décrit le nombre d'habitants que l'agriculture peut nourrir. D'après la réponse à la question 2, nous savons que pour tout entier naturel n supérieur à 46, $u_n < v_n$. c'est donc à partir de 1846 que la population de l'Angleterre serait devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture. 1 pt