Nom : .... Prénom : ....

TES4	DS n° 5 de mathématiques (1h)	du vendredi 1er février 2019

Calculatrice autorisée
La rédaction, la précision et le soin apportés aux justifications comptent pour une part importante dans l'application du barème.

Exercice 1 : 11 points

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année. Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.

À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004 + n$. On a ainsi $u_0 = 25\ 000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :
   a) au 1er janvier 2005 ;
   b) au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25\ 000 \times 0,85^n$.
3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.
   Compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 :	Variables	u un réel, n un entier
L2 :	Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	Traitement	Tant que .... faire
L5 :		u prend la valeur ....
L6 :		n prend la valeur ....
L7 :		Fin Tant que
L8 :	Sortie	Afficher n

4. Programmer cet algorithme sur la calculatrice. Quelle valeur obtient-on en sortie après exécution de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

Partie B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.

On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014 + n$. On a ainsi $v_0 = 5\ 000$.

1. a) Calculer v_1 et v_2.
   b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,75v_n + 400$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1\ 600$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser la valeur de w_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1\ 600 + 3\ 400 \times 0,75^n$.
   d) Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

Exercice 2 : 9 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,10]$, $f'(x) = (-2x+7)\mathrm{e}^{-x+4}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$. Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,10]$ et déterminer un encadrement d'amplitude $0,01$ de α.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1. Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum ?
   Quel est ce bénéfice maximal en euros ?
2. À partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?