TES4	Correction du DS n° 5 (1h)	du vendredi 1er février 2019

Exercice 1 : 11 points

Partie A

1. (a) Une baisse de 15 % correspond à $CM = 1 - \dfrac{15}{100} = 0,85$
   $u_1 = 25\ 000 \times 0,85 = 21\ 250$
   Au 1er janvier 2005, la population de singes sera d'environ 21 250 . 0,5 pt
   (b) $u_2 = 21\ 250 \times 0,85 = 18\ 062{,}5 \approx 18\ 063$.
   Au 1er janvier 2006, la population de singes sera d'environ 18 063 . 0,5 pt
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,85u_n$.
   (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = 25\ 000$.
   Le terme général de (u_n) est : $u_n = u_0 \times q^n$, soit encore : $\boxed{u_n = 25\ 000 \times 0,85^n}$. 1,5 pt
3. Algorithme modifié :

Variables	u un réel, n un entier
Initialisation	u prend la valeur 25 000
	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que $u > 5\ 000$ faire
	u prend la valeur $u * 0,85$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher n

1,5 pt

4. On obtient en sortie $n = 10$. Cela signifie qu'à partir du 1er janvier 2014, le nombre de singes sera inférieur à 5 000. 1,5 pt

Partie B

1. (a) Chaque année $\dfrac{1}{4}$ des singes disparaissent, il reste donc 75 % des singes.
   $v_1 = v_0 \times 0,75 + 400 = 5\ 000 \times 0,75 + 400 = 4\ 150$.
   De même : $v_2 = v_1 \times 0,75 + 400 = 4150 \times 0,75 + 400 = 3\ 512{,}5 \approx 3\ 513$. 1 pt
   (b) Chaque année $\dfrac{1}{4}$ des singes disparaissent, il reste donc $v_n \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$, soit $0,75v_n$ auquel 400 naissances se rajoutent.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = 0,75v_n + 400}$. 0,5 pt
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $w_{n+1} = v_{n+1} - 1\ 600$
   $w_{n+1} = 0,75v_n + 400 - 1\ 600$
   $w_{n+1} = 0,75v_n - 1\ 200$
   $w_{n+1} = 0,75\left(v_n - \dfrac{1200}{0,75}\right)$
   $w_{n+1} = 0,75\,(v_n - 1\ 600)$
   $w_{n+1} = 0,75w_n$.
   La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme :
   $w_0 = v_0 - 1\ 600 = 5\ 000 - 1\ 600 = 3\ 400$. 1,5 pt
   (b) (w_n) étant géométrique de premier terme $w_0 = 3\ 400$, son terme général vaut :
   $w_n = w_0 \times q^n$, ainsi $\boxed{w_n = 3\ 400 \times 0,75^n}$. 1 pt

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - 1\ 600$ donc $v_n = w_n + 1\ 600$.
Ainsi : $v_n = 1\ 600 + 3\ 400 \times 0,75^n$. 0,5 pt

(d) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75^n = 0$, car $0 < 0,75 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1\ 600 + 3\ 400 \times 0,75^n) = 1\ 600$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1\ 600}$. Ceci signifie qu'à terme la population de singes va se rapprocher de 1 600. 1 pt

Exercice 2 : 9 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,10]$ par :
$f(x) = (2x - 5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20$.

Partie A

1. f est dérivable sur $[\,0\,;\,10]$.
posons $u(x) = 2x - 5$, $u'(x) = 2$
$v(x) = \mathrm{e}^{-x+4}$, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+4}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + 0$
$f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x+4} + (2x - 5)(-1\mathrm{e}^{-x+4})$
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x+4}(2 - 2x + 5)$
$\boxed{f'(x) = (-2x + 7)\mathrm{e}^{-x+4}}$ 1,5 pt

2. Valeur utile : $-2x = 7 = 0 \iff x = 3,5$

x	0		$3,5$		10
$-2x+7$		$+$	0	$-$	
e^{-x+4}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-252,991$	$\nearrow$	$23,297$	$\searrow$	$20,037$

2,5 pts

3. On complète le tableau de variation de la fonction f :

x	0		α		$3,5$		10
$f(x)$	$-252,991$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$23,297$	$\searrow$	$20,037$

• Pour tout $x \in [3,5; 10]$, $f(x) > 20$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[3,5; 10]$.
• f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0\,;\,3,5]$. $0 \in [f(0); f(3.5)]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 3,5]$.
On peut en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[0\,;\,10]$.

$$\left.\begin{array}{lcl} f(1) & \approx & -40,3 < 0 \\ f(2) & \approx & 12,6 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 < \alpha < 2 \qquad \left.\begin{array}{lcl} f(1,5) & \approx & -4,4 < 0 \\ f(1,6) & \approx & 0,16 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1,5 < \alpha \in< 1,6$$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(1,59) & \approx & -0,26 < 0 \\ f(1,60) & \approx & 0,16 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1,59 < \alpha < 1,60$$

2,5 pts

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur $[\,0\,;\,10]$ par : $f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20$.
1,25 pt

1. Le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum correspond à $x = 3,5$ centaines d'objets donc 350 objets.
   $f(3,5) \approx 23,297$ donc le bénéfice maximal réalisé est de 23 297 €.
2. L'entreprise réalise un bénéfice quand il vend au moins x centaines d'objets avec $f(x) \geqslant 0$.
   D'après le tableau de variation de la fonction f, on déduit le signe de $f(x)$.

x	0		α		10
$f(x)$		$-$	0	$+$	

   $f(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \alpha$. Or $\alpha \in [1,59\,;\,1,60]$ donc il faut vendre au moins 160 objets pour réaliser un bénéfice.
   1,25 pt