barème sur 10 points

$C_m(q) = 4 + (0,2q^2 - 2q)\mathrm{e}^{-0,2q}$ sur $[1\,;20]$ (coût marginal).

1. $C_T(q) = 4q - q^2\mathrm{e}^{-0,2q}$ sur $[1\,;20]$ (coût total).
   La fonction C_T est dérivable sur $[1\,;20]$.
   Posons $u(x) = q^2\,;\ u'(q) = 2q$.
   $v(x) = \mathrm{e}^{-0,2q}\,;\ v'(q) = -0,2\mathrm{e}^{-0,2q}$.
   $C_T'(q) = 4 - [u'(q)v(q) + u(q)v'(q)]$
   $C_T'(q) = 4 - (2q\mathrm{e}^{-0,2q} - 0,2q^2\mathrm{e}^{-0,2q})$
   $C_T'(q) = 4 - 2q\mathrm{e}^{-0,2q} + 0,2q^2\mathrm{e}^{-0,2q}$
   $C_T'(q) = 4 + (0,2q^2 - 2q)\mathrm{e}^{-0,2q}$
   $\boxed{C_T'(q) = C_m(q)}$ (2 pts)

2. (a) Pour tout $q \in [1\,;20]$,
   $C_M(q) = \dfrac{C_T(q)}{q}$ (coût moyen)
   $C_M(q) = \dfrac{4q - q^2\mathrm{e}^{-0,2q}}{q}$
   $C_M(q) = \dfrac{q(4 - q\mathrm{e}^{-0,2q})}{q}$
   $\boxed{C_M(q) = 4 - q\mathrm{e}^{-0,2q}}$ (1,5 pt)

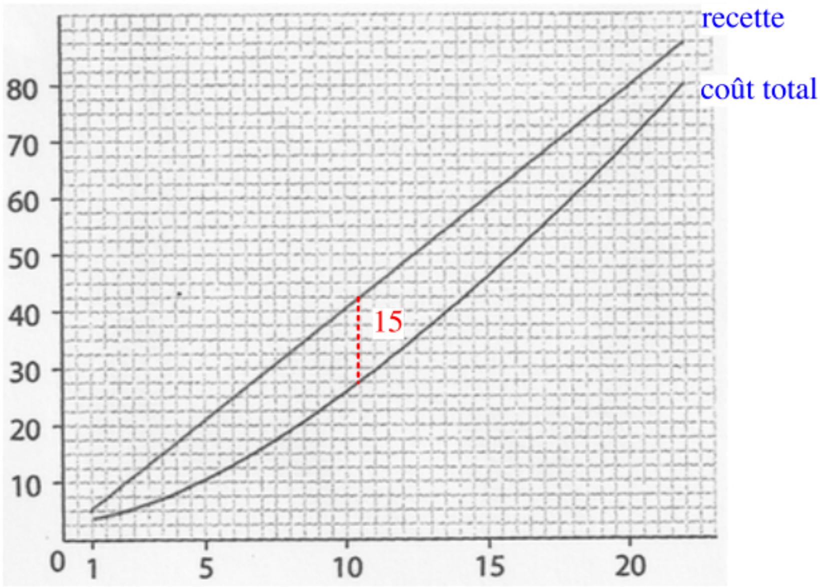
   (b) La fonction C_M est dérivable sur $[1\,;20]$.
   $C_M'(q) = -1\mathrm{e}^{-0,2q} - q\,(-0,2\mathrm{e}^{-0,2q})$
   $\boxed{C_M'(q) = \mathrm{e}^{-0,2q}\,(-1 + 0,2q)}$ (1 pt)

   (c) Pour tout $q \in [1\,;20]$, $\mathrm{e}^{-0,2q} > 0$ donc $C_M'(q)$ est du signe de $0,2q - 1$.

x	1		5		10
$C_M'(q)$		$-$	0	$+$	
$C_M(q)$		$\searrow$	$4 - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	

   Le coût moyen est minimal pour $q_0 = 5$, c'est à dire pour une production de 5 tonnes.
   $C_M(5) = 4 - 5\mathrm{e}^{-1} \approx 2,161$ donc le coût moyen minimal est d'environ 2161 euros.
   $C_m(5) = 4 + (0,2 \times 25 - 10)\mathrm{e}^{-1} = 4 - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$.
   Pour 5 tonnes produites, le coût marginal est aussi d'environ 2161 euros. (3,5 pts)

3. Pour tout $q \in [1\,;20]$, $R(q) = 4q$.
   R est une fonction linéaire, elle est représentée par un segment. L'autre courbe représente le coût total.



Le bénéfice est maximal lorsque $R(q) - C_T(q)$ est maximal. C'est à dire que la distance verticale entre les deux courbes est la plus grande, celle ci est d'environ 6 graduations qui chacune représente 2,5 milliers d'euros. Le bénéfice maximal est d'environ 15 milliers d'euros. (2 pts)